Idrissa Kaboré

ALGEBRE III

Lundi, le 18 Decembre 2017

Programme

①

I) Reduction des endomorphisme.

- Polynômes d'endomorphisme (d'end$\mathcal{F}$)
- Element propres, valeurs propres et vecteurs propres
- Polynômes caractéristiques.
- Diagonalisation.
- Trigonalisation
- Reduction de Jordan.

II - Dualité

- Espace dual d'un $\mathbb{K}$ e-v.
- Base duale.
- Transposition
- hyperplan

References bibliographique.

- Algebre linéaire $2^{ème}$ Joseph Grifare.
- Mathematiques DEUGA 2°A.
  Elé Azoulay, Jean, Avignant.
- Toute l'algèbre de la licence.
  Jean-pierre Escalier.

Scanned by CamScanner

Chapitre I : Réduction des endϕ.

<u>But</u> : Soit f un endϕ d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie. Le but de la réduction de f est de trouver une base de f dans laquelle sa matrice est la plus simple possible. (diagonal, triangulaire . . .)

L'objet donc de ce chapitre est de présenter quelques technique permettant de trouver les bases adaptés.

I. Polynômes d'endomorphisme

Définition : $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$

Soit f un endϕ de E et P un polynôme à coefficient dans $\mathbb{K}$ ($P \in \mathbb{K}[X]$ et à indéterminer X. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ alors on pose

$$\boxed{P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k}$$

avec la Convention $f^0 = Id_E$ et f^k est obtenue par la formule récursive. $\boxed{f^k = f \circ f^{k-1}}$

$P(f)$ est un endϕ de E appelé polynômes d'endomorphisme de f.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[f] \\ P & \longmapsto & P(f) \end{array}$$

est un morphisme d'Algèbres.

morphisme d'algèbre : $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \underset{\substack{\text{produit} \\ \text{de Polynome}}}{\times})$, $(\mathbb{K}[f], +, \cdot, \underset{\substack{\text{composit.} \\ \text{de polynome}}}{\circ})$

En particulier cette application verifie les propriétés suivantes.

$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

(1) $(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$

(2) $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Remarque : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$: $\boxed{P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)}$

En effet :

(1) $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

(2) $(QP)(f) = Q(f) \circ P(f)$.

or $PQ = QP$

Donc $(PQ)(f) = (QP)(f)$.

Ainsi : $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.

NB : $(PQ)(f)(x) = P(f) \circ Q(f)(x)$ mais ③
jamais $P(f)(x) \circ Q(f)(x)$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endo f de E dans une base donnée et

$P = X^3 - X + 2$, $Q = X^2 - 2X - 1$.

Calculons $Q(A)$, $P(A)$, $QP(A)$.

$Q(A) = A^2 - 2A - I$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Q(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

$P(A) = A^3 - A + 2I$.

$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$P(A) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

$(QP)(A) = Q(A) \times P(A)$.

$= 0 \; P(A)$

$\boxed{(QP)(A) = 0}$

Scanned by CamScanner

Calculer QP puis deduire $QP(A)$.

$(X^2-X-1)(X^3-X+2) = X^5 - X^3 + 2X^2 - X^4 + X^2 + 2X$
$- X^3 + X - 2$.

$QP = X^5 - X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 3X - 2$.. continuer

Proposition.

$f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(f) = 0$ et $P(0) \neq 0$.
Alors, f est inversible et f^{-1} est un polynôme en f

Demonstration

Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$; $a_n \neq 0$. Alors

$P(0) \neq 0 \Rightarrow a_0 \neq 0$.

On a $P(f) = a_0 id_E + a_1 f + \cdots a_n f^n$

Comme $a_0 \neq 0$ alors on a :

$$id_E = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} f^k \quad \text{car } P(f) = 0.$$

$$= f \circ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{a_0}\right) f^k.$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{a_{k+1}}{a_0}\right) f^k\right] \circ f$$

Ce qui nous dit que f est inversible et.

$$f^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{a_{k+1}}{a_0}\right) f^k.$$

~~Proposition~~ II | Sous-espace stables

Définition : On dit qu'un sous espace F est stable par un endomorphisme f de E si $f(F) \subset F$ i.e $\forall x \in F : f(x) \in F$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des s-ev stables par f.

Preuve Exo

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Alors $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces stables par f.

De même ~~pour~~ tout s.e.v F stable par f ~~l'est aussi par~~ f l'est aussi pour $P(f)$.

Preuve :

- Soit $x \in \ker P(f)$.

$$
\begin{aligned}
P(f)(f(x)) &= P(f) \circ f(x) \\
&= f \circ P(f)(x) \\
&= f[P(f)(x)] \\
&= f(0) \\
&= 0 \Rightarrow f(x) \in \ker P(f)
\end{aligned}
$$

- Soit $x \in \operatorname{Im} P(f)$. Alors il existe $y \in E$ tq $x = P(f)(y)$.

Donc $f(x) = f \circ P(f)(y)$.

$= P(f) \circ f(y)$

$= P(f)(f(y))$

$\Rightarrow f(x) \in \operatorname{Im} P(f)$,

• Soit $x \in F$. Il suffit de montrer que

$\forall k \geq 0$, $f^k(x) \in F$.

On procède par récurrence. Pour $k = 0, 1$ c'est évident.

Supposons que $f^k(x) \in F$ pour $k \geq 2$.

Comme F est stable par f alors $f[f^k(x)] \in F$.

Donc $f^{k+1}(x) \in F$.

Donc.

$\forall k \geq 0 : f^k(x) \in F$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on a:

$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x)$.

Or $f^k(x) \in F$, $\forall k \geq 0$.

Donc $P(f)(x) \in F$ car F est un sous espace vectorielle stable

Interêt des s-e v stables.

Pour un endo f Trouver les s-ev stables peut offrir 2 interêts particuliers.

- Diagonalisation par blocs.

Si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ où les F_k sont des s-ev stables pour F_p de base respectives $\mathcal{B}_k$ alors

$\mathcal{B} = \bigcup_{k=1} \mathcal{B}_k$ est une base de E, et dans cette

base, la matrice de f est diagonale par blocs de la forme $D = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_p \end{pmatrix}$ où

M_k est la matrice de l'endφ induit ~~par~~ f_k de f sur F_k dans la base $\mathcal{B}_k$.

- Trigonalisation par blocs.

Si $\{0\} \subset F_1 \subset \cdots \subset F_p = E$ où ~~les~~ F_k est stable par f et $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1 alors on peut la compléter en une base de F_2 et ainsi de suite en une base $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}$ de $F_p = E$.

Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f est triangulaire par bloc de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1p} \\ & M_{22} & \cdots & M_{2p} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & M_{pp} \end{pmatrix}$$

III) Lemme des noyaux

Théorème 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Alors si P et Q sont premiers entre eux, on a :

$$\boxed{\operatorname{Ker}[PQ(f)] = \operatorname{Ker} P(f) \oplus \operatorname{Ker} Q(f)}$$

Preuve Comme P et Q sont premiers entres eux d'après le lemme de Bezout, il existe deux Polynômes U et V dans $\mathbb{K}[X]$ tq : $UP + VQ = 1$

Ainsi, en passant aux polynomes en f on a :

$$U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = Id_E.$$

Soit $x \in Ker P(f) \cap Ker Q(f)$.

Alors de la relation de Bezout on a :

$$x = U(f) \circ P(f)(x) + V(f) \circ Q(f)(x)$$

$$= U(f)(0) + V(f)(0) = 0.$$

Donc $Ker P(f) + Ker Q(f) = Ker P(f) \oplus Ker Q(f)$.

Soit $x \in Ker PQ(f)$ et posons

$$\begin{cases} x_1 = V(f) \circ Q(f)(x) \\ x_2 = U(f) \circ P(f)(x) \end{cases}$$

on a $x = x_1 + x_2$ et on verifie que $P(f)(x_1) = 0$ et $Q(f)(x_2) = 0$.

Ainsi $x_1 \in Ker P(f)$ et $x_2 \in Ker Q(f)$

Donc $Ker PQ(f) = Ker P(f) + Ker Q(f)$.

En definitive $Ker PQ(f) = Ker P(f) \oplus Ker Q(f)$

Théorème 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1 \dots P_\ell \in \mathbb{K}[X]$ avec $\ell \geq 2$. Si les polynômes $P_1 \dots P_\ell$ sont premiers entre eux deux à deux alors.

$$\operatorname{Ker} \prod_{k=1}^{\ell} P_k(f) = \bigoplus_{k=1}^{\ell} \operatorname{Ker} P_k(f).$$

Corollaire Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de f. i.e $P(f) = 0$.

Alors si P se décompose sous la forme.

$P = \prod_{k=1}^{\ell} P_k$ où les P_k sont premiers entre eux deux à deux alors on a :

$$\boxed{E = \bigoplus_{k=1}^{\ell} \operatorname{Ker} P_k(f)}$$

21/12/2017
$8^h - 12^h$

III) Element propres d'un endϕ.

I Valeurs propres et vecteurs propres.

Definition : Soit f un ~~element~~ endϕ de E.

- On dit qu'un scalaire λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non-nul x / $f(x) = \lambda x$.
- On dit qu'un vecteur non-nul x est un vecteur propre de f si il existe un scalaire λ tel que $f(x) = \lambda x$.

Dans ce cas x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

• L'ensemble des valeurs propres de f est appelé spectre de f et noté $Sp_{\mathbb{K}}(f)$

$$Sp_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E - \{0\},\ f(x) = \lambda x\}$$

• L'ensemble des vecteurs propres de f associés à une valeur propre de λ étendue au vecteur non nul constitue un sous espace vectoriel appelé sous espace propre associé à la valeur propre λ. On le note : E_λ, $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$

Remarque : $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id_E)$

Proposition : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Alors x est un vecteur propre de f si $\mathbb{K}x$ est stable par f
(s-espace)

Preuve : soit $x \in E$ $x \neq 0$, supposons que $\mathbb{K}x$ est stable par f. Alors $f(\mathbb{K}x) \subset \mathbb{K}x$.

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $f(\alpha x) \in \mathbb{K}x$.

Ainsi, il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tq $f(\alpha x) = \beta x$.

En faisant $\alpha = 1$ et $\lambda = \beta_\alpha$ on obtient

$$f(x) = \lambda x$$

Donc x est un vecteur propre de f.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et φ un isomorphisme de E.
Alors $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et f ont les mêmes valeurs propres

Preuve : Soit $\lambda \in Sp(f)$ et x un vecteur propre de f associé à λ. Montrons que λ est une valeur propre de $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

On a : $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi(x))$

A, B sont semblables $\Leftrightarrow B = P^{-1}AP$, $A = PBP^{-1}$

$= \varphi \circ f(x)) = \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$

Donc λ est une valeur propre de $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi(x)$ sont des vecteurs propres associés

Autrement dit deux matrices semblables ont le même spectre.

Proposition : $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$
Alors : Pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul on a :
(1) $P(\lambda) \in Sp(P(f))$.
(2) Pour tout vecteur propre x associé à λ :

$$\boxed{P(f)(x) = P(\lambda)_x}$$

Preuve : soit x un vecteur de f associé à λ. Alors
On a : $f^k(x) = \lambda^k x$, $\forall k \geq 0$.

Par suite, en considérant le polynôme

$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on obtient.

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda^k x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = P(\lambda) x.$$

2°) Polynôme caractéristique.

On suppose ~~que~~ desormais que les espaces vectoriels sont de dimension fini n.

Def : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caracteristique de f, le polynôme nôte χ_f ou P_f est defini par

$$P_f(X) = \det(f - X\,id_E).$$

Si M est la matrice de f dans une base donnée alors le polynôme caracteristique de f ~~est~~ s'ecrit χ_M ou P_M et $P_M(X) = |M - XI_n|$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

La matrice d'un endo f dans une base donné de E on a :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} 2-X & 5 & -6 \\ 4 & 6-X & -9 \\ 3 & 6 & -8-X \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 5 & -6 \\ 1-X & 6-X & -9 \\ 1-X & 6 & -8-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 1 & 6-X & -9 \\ 1 & 6 & -8-X \end{vmatrix}$$

$$(1-X)\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 1-X & -3 \\ 0 & 1 & -2-X \end{vmatrix} \Rightarrow (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & -3 \\ 1 & -2-X \end{vmatrix}.$$

$$= (1-X)\left[(1-X)(-2-X)+3\right].$$

$$\chi_f = (1-X)(1+X+X^2)$$

$$\chi_f = 1-X^3.$$

Rq : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

En effet soit A et B deux matrices semblables. Il existe P inversibles tq : $B = P^{-1}AP$. D'où

$$\chi_B = \det(P^{-1}AP - XI)$$

$$= \det\left[P^{-1}(A-XI)P\right].$$

$$= \det(P^{-1})\det(A-XI)\det(P)$$

$$= \frac{1}{\det(P)}\chi_A(X)\det(P) = \chi_A(X).$$

Définition : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle Trace de M la somme des coefficients de sa diagonale principale.

Proposition : Le polynôme caractéristique d'une matrice M vérifie :

$$\chi_M(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(M) X^{n-1} + \dots + \det(M)$$

En particulier pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on a.

$$\chi_M(X) = X^2 - (a+d)X - ad - bc$$

Definition:

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On dit que un polynome $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé si P se decompose en produit de facteur du prèmier degré distinct ou non.

Definition

On dit qu'un corps est algébriquement clos si tout polynome est scindé sur $\mathbb{K}$.

Exemple: - $\mathbb{C}$ est algebriquement clos
- $\mathbb{R}$ ne l'est pas

Exemple $1 + X + X^2$ n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$.

Proposition: Le polynôme caracteristique d'une matrice triangulaire est scindé. De plus, si sa diagonale principale est $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on a:

$$\chi_M(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X).$$

Preuve: $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - X & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - X \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\chi_M(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\cdots(\lambda_n - X)}$$

Théorème : $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, les caractéristiques suivantes sont équivalentes :

(1) λ est une valeur propre de f.

(2) $\chi_f(\lambda) = 0$.

(3) λ est une racine de χ_f.

Preuve : La preuve du théorème repose sur les équivalences suivantes :

(1) λ est une valeur propre de f.

(2) $\ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\}$.

(3) $f - \lambda id_E$ est non bijectif ;

(4) $f - \lambda id_E$ .... bijectif

(5) $\det(f - \lambda Id_E) = 0$

(6) $\chi_f(\lambda) = 0$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{C}$-e v de ~~..~~ dim n. Alors tout endo f de E admet au moins une valeurs propre et au plus n valeurs propres.

Preuve : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et $\dim E = n$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ en dim finie, Alors. Pour toute valeur propres λ de multiplicité α dans le polynôme caractérisque. On a :

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha.$$

Preuve : Soit p la dim de E_λ. Comme λ est une valeur propre de f alors :

E_λ contient au moins un vecteur non-nul. Donc

$\dim E_\lambda = p \geq 1$

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_λ. Alors complétons la en une base de E :

$\mathcal{B} = (e_1 \dots, e_p, e_{p+1} \dots e_n)$. Dans cette base la matrice de f s'écrit ; $M = \begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$\chi_M = |M - XI_n| = \begin{vmatrix} (\lambda - X) I_p & B \\ 0 & A - XI_{n-p} \end{vmatrix}$$

$$= |(\lambda - X) I_p| \times |A - XI_{n-p}|.$$

$$\chi_M = (\lambda - X)^p |A - XI_{n-p}|.$$

Comme λ est de multiplicité α dans χ_M alors

On déduit $p \leq \alpha$. ◻

Théorème : soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ r valeurs propre distincts deux à deux.

Si $x_1, x_2 \dots, x_r$ sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$ alors la famille $(x_1, \dots, x_r)$ ~~soit~~ est libre et le s-e-v qu'elle engendre est stable par f.

Preuve : Soit F le s.e.v engendré par $\{x_1, \dots x_r\}$. Soit $y \in F$. Alors il existe $\alpha_1 \dots \alpha_r \in \mathbb{K}$. tel que $y = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$. Donc

$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i x_i \in F.$$

Demontrons que $\dim F \leq r$. Comme F est stable par f on peut considérer g l'endo induit de f sur F. Remarquons que les scalaires $\lambda_1, \dots \lambda_r$ sont également des valeurs propres de g.
Donc $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont des racine de χ_g. Ainsi χ_g possède au moin r racines Donc $d^\circ \chi_g \geq r$ ou $d^\circ_g \chi_g = \dim F$.

En définitive, $\dim F = r$ Ce qui prouve que $(x_1, \dots x_2 \dots x_r)$ est libre (et son rang vaut r)

Corollaire : Soit $\lambda_1 \dots \lambda_r$ des valeurs de f. deux à deux distinctes. Alors on a la somme directe :

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

<u>Preuve</u> : Posons $\varphi : E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_r} \to E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r}$

$$(x_1, \cdots, x_r) \longmapsto x_1 + \cdots + x_r$$

On verifie aisement que φ est lineaire

Montrons que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$

Soit $(x_1, \cdots x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tq $x_1 + \cdots + x_r = 0$

Supposons qu'il y ait seulement p vecteur parmi les r qui soient non nuls. Dans ce cas, quitte à changer la numerotation, on peut supposer que ce sont les p premiers vecteurs, Ainsi, $x_1 \cdots, x_p$ sont des vecteurs propres associé respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 \cdots \lambda_p$ deux à deux distinctes.

Par conséquent, $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre en <u>vertu du theorème</u> précédent. Ce qui implique que $x_1 + \cdots + x_p \neq 0$ ce qui est contradictoire.

Donc $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. Par conséquent la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r}$ est direct.

<u>Proposition</u> :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e-stable par f.

Alors $\chi_{f/F} \mid \chi_f$

Preuve :

Considérons $(e_1, \dots, e_p)$ une base F que l'on complète en une base de E : $B(e_1, \dots e_p, e_{p+1} \dots e_n)$

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$ où A est une matrice de $g = f_{/F}$ dans $(e_1, \dots e_p)$.

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} A - XI_p & C \\ 0 & B - \cancel{X} I_{n-p} \end{vmatrix}$$

$$= |A - XI_p| \times |B - XI_{n-p}|$$

$$\chi_f = \chi_g \, |B - XI_{n-p}| \Rightarrow \chi_g / \chi_f.$$

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $(F_1 \dots F_r)$ une famille de s.e.v stables par f telles que

$$\boxed{E = \bigoplus_{k=0}^{r} F_k}$$

Alors :

$$\chi_f = \chi_{g_1}, \chi_{g_2} \dots \chi_{g_r} \text{ où } g_k = f_{/F_k}.$$

Preuve :

Soit $\mathcal{B}_k$ une base de F_k, $k = 1 \dots r$.

Alors $\mathcal{B} = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k$ est une base de E. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix}$ où

$M_k = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_k}(g_k)$.

Ainsi : $$\chi_f = \begin{vmatrix} M_1 - XI_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r - XI_{\alpha_r} \end{vmatrix} =$$

$$= \chi_{g_1} \chi_{g_2} \cdots \chi_{g_r}$$

Théorème (de Cayley-Hamilton).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors le polynôme caractéristique de f ou de M sa matrice dans une base donnée est annulateur de f ou de M : $\chi_f(f) = 0$, $P_M(M) = 0$.

Preuve : Soit M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$. On sait que :

$(*)$ $(M - XI)(M - XI)^* = \chi_f \times I$ où $(M - XI)^*$ est la transposée de la comatrice de $M - XI$

Les membres de cette égalité sont des polynômes à indéterminée X et à coefficient dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

En faisant $X = M$ dans $(*)$ le premier membre s'annule donc $\chi_f(M) = 0$.

Exercice :

On considère les end ϕ f et g de $\mathbb{R}^3$ représentés par leur matrices respectives A et B dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Determiner le spectre de f et g.

2) determiner les sous espaces propres de g.
Exist-il une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de g ?
Si Oui en préciser une puis écrire la matrice de g dans celle-ci.

3- vérifier le theorème de Cayley-Hamilton pour A et B.

Resolution

1) Determinons les spectres de f et g.

* Polynôme caractéristique de f.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 2 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 2 \\ 3-X & -X & 2 \\ 3-X & 2 & -X \end{vmatrix}.$$

$$= (3-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 2 & -X \end{vmatrix} = (3-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -X-1 & 0 \\ 0 & 1 & -X-2 \end{vmatrix}$$

$$= (3-X)(-1-X)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2-X \end{vmatrix} = (1+X)(2+X)(3-X)$$

$$\chi_f = (1+X)(2+X)(3-X)$$

D'où $Sp(f) = \{-2, -1, 3\}$

* Polynôme caractéristique de g.

$$\chi_B = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1-X & -1-X & 1 \\ 1-X & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1-X & -1-X & 1 \\ 1-X & 1 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-X & 0 \\ 0 & 0 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$\chi_g = (1-X)(-2-X)^2$$

$$\boxed{Sp(g) = \{-2, 1\}}$$

2°) Les sous espaces de g.

* E_{-2}

$BU = -2U$

$U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=-2x \\ x-y+z=-2y \\ x+y-z=-2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z=0$$

$$\Leftrightarrow x=-y-z.$$

$$u\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \Big($$

$$= \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

$= yu_1 + zu_2$ avec

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{-2} = \langle u_1, u_2 \rangle.}$$

$* E_1$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow Bu = u.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=x \\ x-y+z=y \\ x+y-z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -2x+y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -3y+3z=0 \\ +3y-3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \rightarrow u\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = xu_3$$

$\boxed{E_1 = \langle u_3 \rangle}$

Comme E_{-2} et E_1 sont en sommes directes alors la reunions d'une base de E_{-2} et d'une base de E_1 est libre.

Donc (u_1, u_2, u_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Par conséquent, (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de g.

La matrice de g dans la base (u_1, u_2, u_3) est:

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3- Verifions le théorème de Cauley-Hamilton

$$\chi_A = (3-X)(1+X)(2+X)$$

$$\chi_A(A) = (3I - A)(I+A)(2I+A).$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On $\chi_A(A) = 0$.

De même $\chi_B(B) = 0$.

4 - Calculer A^{60} et B^{57}

$d°\chi_A = 3$, $\chi_A(A) = 0$

$$\boxed{X^{60} = \chi_A Q_A + R \quad d°R \leq 2.}$$

$A^{60} = R(A)$. $\chi_A = (3-X)(1+X)(2+X)$.

$= -X^3 + 7X + 6$.

$d°R \leq 2 \Rightarrow \underline{R(x) = ax^2 + bx + c}$

$$\begin{cases} R(3) = 9a + 3b + c = 3^{60} \\ R(-1) = +a - b + c = (-1)^{60} = 1 \\ R(-2) = 4a - 2b + c = (-2)^{60} = 2^{60}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 3^{60} \\ a - b + c = 1 \\ 4a - 2b + c = 2^{60} \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = 3^{60} \\ 4a - 2b + c = (-2)^{60} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c = 1 \\ 12b - 8c = 3^{60} - 9 \\ +2b - 3c = 2^{60} - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 + b - c \\ 2b - 3c = 2^{60} - 4 \\ 12b - 8c = 3^{60} - 9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 + b - c \\ 2b - 3c = 2^{60} - 4 \\ 10c = 24 - 6\cancel{\times}2^{60} + 3^{60} - 9 \end{cases}$$

$$C = \frac{16}{10} - \frac{6}{10} \cdot 2^{60} + \frac{1}{10} 3^{60}$$

$$A^{60} = R(A) = a A^2 + bA + c$$

Mercredi, le 24 Janvier 2018 8h - 17h

V) Polynôme minimal d'un endo

Définition:

Soit f un endo non nul de E et de dimension finie ($\dim < \infty$). On appelle polynôme minimal de f, que l'on note μ_f le polynôme unitaire, annulateur de f de degré minimal.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors l'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par le polynôme minimal.

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] : P(f) = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \mu_f Q$$

Preuve:

$f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $f \neq 0$ soit P un polynôme annulateur de f. Alors par division euclidienne de P par μ_f on obtient Q et R tq:

$$P = \mu_f Q + R \quad \text{avec } R = 0 \text{ ou } d^\circ R < d^\circ \mu_f$$

Comme P est annulateur de f, alors, il vient que $R(f) = 0$ donc, $R = 0$.

puisque par définition μ_f est le ~~polynôme~~ ~~non~~ degré minimal parmi les polynômes annulateur non nul de f.

Ce qui prouve que l'ensemble des polynômes annulateur de f, $\mathcal{A}(f)$ est l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par μ_f : $\mathcal{A}(f) = \langle \mu_f \rangle$.

Corollaire :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors le polynôme minimal de f divise le polynome caractéristique de ~~μ_f~~ f : $\mu_f \mid \chi_f$

~~μ_f~~ - Preuve : En vertu du théorème de Cayley-Hamilton, χ_f est annulateur de f. Donc μ_f divise χ_f.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \neq 0$. Alors l'ensemble des racines de μ_f coïncide avec celui de χ_f.

$$Sp(f) = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \mu_f(\lambda) = 0 \}.$$

Preuve

Soit λ une valeur propre de f. Alors $\mu_f(\lambda)$ est une valeur propre de $\mu_f(f)$.

Soit x un vecteur propre de f associé à $\mu_f(\lambda)$.

Alors on a : $\mu_f(f)(x) = \mu_f(\lambda)x$, Or $\mu_f(f) = 0$.

Donc $\mu_f(\lambda)x = 0$ Par suite, $\mu_f(\lambda) = 0$ car $x \neq 0$ en tant que vecteur propre de f.

Scanned by CamScanner

Ainsi, $Sp_{\mathbb{K}}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \mu_f(\lambda) = 0\}$.

car $\mu_f \mid \chi_f$. ▨

Corollaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. si χ_f est ~~sim~~ scindé tq :

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\alpha_i} \text{ avec } \lambda_i \neq \lambda_j, \ i \neq j \text{ et}$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$$

$\dim E = n$.

alors μ_f est scindé et on a :

$$\mu_f = (X - \lambda_1)^{\beta_1} (X - \lambda_2)^{\beta_2} \dots (X - \lambda_p)^{\beta_p}.$$

$1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

$i = 1, \dots n$

Exemple : Déterminons le polynôme minimal de M :

1) $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $N = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Resolution :

Donc on a $\chi_M = (1 - X)(2 + X)^2$.

Alors $Sp(M) = \{-2, 1\}$.

Comme χ_M est scindé, il vient que

$\mu_f = (X + 2)(X - 1)$ ou $\mu_f = (X + 2)^2 (X - 1)$

Par vérification : du corollaire du théorème de Cayley-Hamilton.

$\mu_M(M) = (M+2I)(M-I)$.

$M+2I = \begin{pmatrix} -1+2 & 1 & 1 \\ 1 & -1+2 & 1 \\ 1 & 1 & -1+2 \end{pmatrix} \Rightarrow M+2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M-I = \begin{pmatrix} -1-1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow M-I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$(M+2I)(M-I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\mu_M(M) = \begin{pmatrix} -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mu_M(M) = 0$. Donc $\mu_M = (X-1)(X+2)$

2°) $\chi_N \begin{vmatrix} 4-x & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1-x & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3-x & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 & -2 \\ 0 & +2-x & -1 & -2 \\ 0 & -2+x & 3-x & 0 \\ 2-x & 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$

$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & +1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-x & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6-x \end{vmatrix}$

$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 2-x & -2 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix}$

$$= (2-x)^2\left[(2-x)(6-x)+4\right].$$

$$= (2-x)^2(12-8x+x^2+4)$$

$$= (2-x)^2(x^2-8x+16).$$

$$\Rightarrow \chi_N = (2-x)^2(4-x)^2.$$

$$\Rightarrow \mu_N = (x-2)(x-4).$$

IV) Diagonalisation

Définition : On dit qu'un end ϕ f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

Rq : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Si on a : $f(e_i) = \lambda_i e_i$ alors la matrice est dans $\mathcal{B}$ est
D de f diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, f est diagonalisable si il existe une base de E dans laquelle la matrice est diagonale

Interprétation matricielle.

On dit qu'une matrice M est diagonalisable si il existe une matrice inversible P et une matrice D diagonale telles que

$$\boxed{D = P^{-1} M P}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f est diagonalisable.

(2) si $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_p\}$ on a : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$

(3) Si $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_p\}$ on a : $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}$

(4) Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ d'ordre α on a $\dim E_\lambda = \alpha$.

(5) Le polynôme minimal de f, μ_f est scindé en racines simples.

Preuve

(1) ⟹ (4) ⟹ (3) ⟹ (1) ; puis (2) ⟹ (5)

(1) ⟹ (4) supposons que f est diagonalisable. Alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de f. Notons la $\mathcal{B} = (u_1, \ldots u_n)$. Alors, dans cette base la

matrice D et f est diagonale et peut s'écrire :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad D' = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda_{\alpha+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'où $\chi_f = |D - XI_n| = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$

Ainsi, χ_f est scindé.

Soit λ une racine de χ_f d'ordre α.

Alors quitte à renuméroter les vecteurs dans la base on peut supposer que $\lambda_1 = \lambda_2 \cdots = \lambda_\alpha = \lambda$ et $\lambda_i \neq \lambda \quad i > \alpha$.

Par suite dans la base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ la matrice de $f = \lambda id_E$ est :

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & 0 & \lambda_{\alpha+1} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & \cdots & 0 & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

$rg(D_\lambda) = n - \alpha$; D'où $\dim E_\lambda = \dim Ker(f - \lambda id_E)$
$= n - rg(D_\lambda)$

$$\underline{\dim E_\lambda = \alpha}.$$

(4) ⇒ (3).

Supposons que $\dim E_\lambda = \alpha$ pour tout $\lambda \in sp(f)$ avec α multiple de λ dans χ_f

Comme χ_f est scindé, en posant

$Sp(f) = \{\lambda_1, \dots \lambda_p\}$. On a

$$\chi_f = (\lambda_1 - x)^{\alpha_1} \cdots (\lambda_p - x)^{\alpha_p}.$$

avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n$.

$$n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_\lambda \text{ D'où } (3)$$

$(3) \Rightarrow (2)$. Supposons que $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}$

Nous savons que $\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k id_E) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$

Donc, $\dim\left(\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_p - \lambda_k id_E\right) = \dim \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$.

$$= \sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k}.$$

Or par hypothèse $\dim E = \sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k}$.

Donc, $\dim \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k} = \dim E$.

Par conséquent, $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Supposons que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$.

Considérons pour chaque $k \in \{1, \dots p\}$

une base $\mathcal{B}_k$ de E_{λ_k} et Posons

$\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_k$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E.

puisque $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$. De plus, $\mathcal{B}$ est constitué de vecteurs de f. Par conséquent f est diagonalisable. D'ou (1).

(2) $\Rightarrow$ (5) Supposons que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$.

Comme le polynôme $P = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$.

Soit $x \in E_{\lambda_k}$ alors $f(x) = \lambda_k x$.

Donc $P(f)(x) = \prod_{1 \leq i \neq k \leq p} (f - \lambda_i Id_E) \circ (f - \lambda_k Id_E)(x)$

$= \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} (f - \lambda_i Id_E(0))$

$P(f)(x) = 0 \quad \forall x \in E_{\lambda_k}$, k quelconque.

Ce qui nous dit que $P(f) = 0$.

Comme P est scindé en racine simple alors P est le polynôme minimal de f.

(5) $\Rightarrow$ (2) supposons que μ_f est scindé en racine simples. Alors

il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$ tq.

$\mu_f = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$

$f(x) = \lambda_k x$ | $(f - \lambda_k Id_E)(x) = 0$.
$f(x) - \lambda_k x = 0$.

Par suite Comme $\mu_f(f) = 0$ alors on a d'après le lemme des Noyaux.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k IdE).$$

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}.$$

Corollaire:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un s.e.v de E. Si f est diagonalisable ~~alors~~ et est stable sur H alors $f_{/H}$ est diagonalisable.

Proposition

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Si f et g sont diagonalisables et $f \circ g = g \circ f$ alors il existe une base Commune de E qui diagonalise f et g.

Preuve:

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables telle que $f \circ g = g \circ f$.

Alors, $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$, où $\{\lambda_1, \dots \lambda_p\}$ est le spectre de f. Nous allons montrer que E_{λ_k} est stable par g, $k = 1, \dots p$.

Soit $x \in E_{\lambda_k}$. On a $f(x) = \lambda_k x$.

$f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_k x) = \lambda_k g(x)$

Donc $g(x) \in E_{\lambda_k}$. Donc E_{λ_k} est stable par g.

Par suite $g_{/E_{\lambda_k}}$ est diagonalisable en vertu du corollaire précédent. Considérons alors B_k est une base de E_{λ_k} qui diagonalise $g_{/E_{\lambda_k}}$

Ainsi $B = \bigcup_{k=1}^{p} B_k$ est une base de E qui diagonalise g. Car chaque vecteur dans cette base est vecteur propre de f.

Exemple ; La matrice suivante est diagonalisable. Effectuons sa diagonalisation

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \\ 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 12 \end{array}$$

$\to (2-x)(-4-x)(5-x) - 4(-4-x)$

$\to -24 - (2-x)(-2)(12)$.

$\to 0$

37

$$\chi_A = (2-x)(-4-x)(5-x) - 4(-4-x) - 24 - (2-x)(-2)(12)$$

$$= (-4-x)\left[(2-x)(5-x) - 4\right] + 24(-1+2-x)$$

$$= (-4-x)(10-7x+x^2-4) + 24(1-x)$$

$$= (-4-x)(x-1)(x-6) + 24(1-x)$$

$$= (-x+1)\left[(4+x)(x-6) + 24\right]$$

$$= (-x+1)\left[-24-2x+x^2+24\right]$$

$$\Rightarrow (-x+1)(x-2)x$$

$$\underline{\chi_A = x(-x+1)(x-2)}$$

- Comme χ_A est scindé en racines simples alors A est diagonalisable.

$[1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$, où α est la multiplicité de $\lambda]$.

- Spectre de f.

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0, 1 \text{ ou } 2$$

$$Sp(f) = \{0, 1, 2\}.$$

- Sous espaces propres

$\rightarrow E_0$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ -4y+6z=0 \\ -2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z \\ 2y=3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=\frac{3}{2}z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u=\left(-2z;\tfrac{3}{2}z,z\right)=\tfrac{1}{2}z\,(-4,3,2)$$

$u=\frac{1}{2}z\,u_1$ avec $u_1=(-4,3,2)$.

$$E_0=\langle u_1\rangle$$

- E_1

$$u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4z=x \\ 3x-4y+12z=y \\ x-2y+5z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4z=0 \\ 3x-5y+12z=0 \\ x-2y+4z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4z=0 \\ -5y=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_2=(-4z,0,z)=z(-4,0,1)$$

$$\Rightarrow u=z\,u_2,\quad u_2=(-4,0,1)$$

$$\Rightarrow E_1=\langle u_2\rangle$$

- E_2

$$u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4z=2x \\ 3x-4y+12z=2y \\ x-2y+5z=2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 3x - 6y + 12z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_3 = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0).$$

$$\Rightarrow U_3 = yU_3,\ U_3 = (2, 1, 0).$$

$$\Rightarrow E_2 = \langle U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

En définition (U_1, U_2, U_3) est de E formée de vecteurs propres de A. La matrice de diagonalisation de A est

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ et la matrice diagonale associée

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

VI) Trigonalisation.

Définition.

Un endø f est dit trigonalisable si on peut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

$$M = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \begin{matrix} /e_1 \\ /e_2 \\ \vdots \\ /e_n \end{matrix}$$

On a alors :

$f(e_i) = \lambda_i e_i$

$f(e_1) = \lambda_1 e_1$

$f(e_2) = a_{12} e_1 + \lambda_2 e_2$

$f(e_3) = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + \lambda_3 e_3$.

$\vdots$

$f(e_n) = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \cdots + a_{n-1\,n} e_{n-1} + \lambda_n e_n$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les assertions suivant sont équivalentes :

(1) f est trigonalisable

(2) χ_f est scindé en racines simples.

Preuve : (1) $\Rightarrow$ (2).

Supposons que f est trigonalisable. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire de la forme ;

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a :

$$\chi_f = |M - xI_n| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$$

Ce qui prouve que χ_f est scindé. ~~(2) ⇒ (1)~~ 41

(2) ⇒ (1). Supposons que f est scindé. Montrons que par reccurence, sur la dimension de E que f est trigonalisable.

Lundi, le 19 Février 2018 8h-12h

Pour $n = 1$, c'est evident.

Supposons que $n \geq 2$ tout en end ϕ g d'un espace vect de dimension $n-1$ est trigonalisable lorsque χ_g est scindé

Considérons maintenant $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$ et $\chi_f = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$.

Par suite, toute racine λ_i de χ_f est une valeur propre (v.p) de f

Par conséquente, il existe un vecteur non nul v_1 tq $f(v_1) = \lambda_1 v_1$. Complétons ce vecteur en une base de E. Dans cette base, la matrice est de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \cdots * \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

M est ~~est~~ une matrice carrée d'ordre $n-1$. D'où $\chi_f = (\lambda_1 - X)\chi_M$.

Comme χ_f l'est aussi et on a :

$$\chi_M = \prod_{i=2}^{n} (x_i - X).$$

χ_M = étant scindé par hypothèse de recurrence, M est trigonalisable.

Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1} M T$ soit ~~trigo~~ triangulaire supérieur dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Soit Q la matrice d'ordre n donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Remarquons que Q est inversible comme P l'est. De plus on a :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}.$$ Par calcul on vérifie que $Q^{-1} A Q$ est ~~bien~~ triangulaire. Ce qui prouve que f est trigonalisable

** Corollaire : Tout endo f d'un $\mathbb{C}$-e v est trigonable.

Preuve. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos alors tout polynôme à coefficient complexe est scindé.

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

on a $\alpha_i \geq 1$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$

On appelle sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i le s-e v noté $E\lambda_i$ donné par :

$$\boxed{E_{\lambda_i} : Ker(f - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i}}$$

Proposition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ scindé telle que $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où α_i est la multiplicité de λ_i dans χ_f, $i = 1, \dots, p$.

Alors, on a les propriétés suivantes.

(1) E'_{λ_i} est stable

(2) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E'_{\lambda_i}$

(3) $\dim E'_{\lambda_i} = \alpha_i$

Soit B_i une base de E_{λ_i}. Alors $B = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ est une base de E'. Dans cette base, la matrice de f est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_p \end{pmatrix}$$ où M_i est la matrice f/E_{λ_i} dans B_i.

Elle est d'ordre α_i.

On a : $\chi_{f_i} = (-1)^{\alpha_i}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

Ainsi, d'après le théorème de Cayley-Hamilton

$\boxed{\chi_{f_i}(f_i) = 0}$ $\boxed{\chi_{f_i}(M_i) = 0}$

Posons alors $N_i = M_i - \lambda_i I$.

Définition : On dit qu'un endomorphisme g est nilpotent s'il existe un entier r tel que $g^r = 0$

si g est non nulle, l'indice de nilpotence de g est le plus petit entier p tq $g^p = 0$

Exemple : Pour $i = 1, \dots, p$ N_i est une matrice nilpotente d'indice α_i

$N_i, N_i^2, \dots, N_i^{\alpha_i - 1}, N_i^{\alpha_i} = 0$.

Théorème : Soit f un endø trigonalisable.
Alors, il existe un endø diagonalisable d et un endomorphisme nilpotent n tq :

(1) $f = d + n$

(2) $d \circ n = n \circ d$.

Preuve

Il suffit de considérer la représentation matricielle : $M_i = N_i + \lambda_i I_{\alpha_i}$ est de poser :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & & 0 \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p I_{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & N_2 & \\ 0 & & N_p \end{pmatrix}.$$

La matrice D et N conviennent.

$$* \ D + N = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{\alpha_i} + N_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p I_{\alpha_p} + N_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & M_2 & \\ 0 & & \ddots M_p \end{pmatrix}$$

$\star$ $DN = ND$ car $(\lambda_i I_{\alpha_i}) N_i = N_i (\lambda_i I_{\alpha_i})$ (46)

La décomposition issue du théorème précédent est appelée decomposition de Dunford de f.
Cette décomposition est unique.

NB: La décomposition de Dunford est utile dans les calculs des puissance, voire des exponentielles des matrices : A^k, e^A, $k \geq 1$.

En effet :

$$\boxed{(d+n)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i d^{k-i} n^i}$$

VI/ Décomposition spectrale ; éléments spectraux.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et P un annulateur de f.
Posons $\mathcal{E}$ l'ensembles des racines de P dans le corps de variable. Alors, il existe des polynômes P_λ et N_λ avec $\lambda \in \mathcal{E}$ tels que :

(1) $id_E = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f)$ et $f = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} \left[\lambda P_\lambda(f) + N_\lambda(f)\right]$

(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{E}, \lambda \neq \mu, P_\lambda(f) \circ P_\mu(f) = 0$
les $P_\lambda(f)$ sont des projecteurs :

$$[P_\lambda(f)]^2 = P_\lambda(f).$$

(3) Les $N_\lambda(f)$ sont des endo nilpotents satisfaisants :

* $[N_\lambda(f)]^{r_\lambda} = 0$ où r_λ est la multiplicité de λ dans P

* $P_\lambda(f) \circ N_\lambda(f) = N_\lambda(f) \circ P_\lambda(f) = N_\lambda(f)$.

* $P_\lambda(f) \circ N_\mu(f) = N_\mu(f) \circ P_\lambda(f) = N_\mu(f) \circ N_\lambda(f) = 0$
$\lambda \neq \mu$

Preuve: La preuve du theorème repose sur le lemme de Bezout. Soit P un polynômes scindé sur $\mathbb{K}$ et annulateur de f.

$$P = \prod_{\lambda \in \mathcal{E}} (X-\lambda)^{\gamma_\lambda}.$$

Posons $\omega_\lambda = (X-\lambda)^{\gamma_\lambda}$ et $\Omega_\lambda = \frac{P}{\omega_\lambda}$.

$$= \prod_{\mu \neq \lambda} (X-\mu)^{\gamma_\mu}$$

Les polynômes Ω_λ sont premiers dans leurs ensemble, Donc, en vertu du lemme de Bezout, il existe des polynômes A_λ tq

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{E}} A_\lambda \Omega_\lambda = 1.$$

(1) En prenant le polynôme d'end f en f on a:

$$\boxed{Id_E = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} A_\lambda(f)\,\Omega_\lambda(f)} \qquad Id_E = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f)$$

En composant par f, l'égalité ci-dessus devient:

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f) \circ f.$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f) \circ (f - \lambda id_E + \lambda id_E)$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} \left[P_\lambda(f) \circ (f - \lambda id_E) + \lambda P_\lambda(f) \right]$$

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} \left[\lambda P_\lambda(f) + N_\lambda(f) \right] \text{ où}$$

$$N_\lambda(f) = P_\lambda(f) \circ (f - \lambda \, id_E).$$

(2) Soit $\lambda, \mu \in \mathcal{E}$ $\lambda \neq \mu$. Alors le polynôme P divise $\Omega_\lambda \Omega_\mu$. En effet :

$$\Omega_\lambda \Omega_\mu = \frac{P}{\omega_\lambda} \frac{P}{\omega_\mu} = P \frac{P}{\omega_\lambda \omega_\mu}.$$

Par conséquent $P_\lambda P_\mu$ ~~sont~~ est annulateur de f : $P_\lambda(f) \circ P_\mu(f) = 0$.

$$P_\lambda(f) \circ P_\lambda(f) = \left[P_\lambda(f)\right]^2.$$

En multipliant l'égalité. $Id_E = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f)$ par $P_\lambda(f)$ on a :

$$P_\lambda(f) = \sum_{\mu \in \mathcal{E}} P_\lambda(f) \circ P_\mu(f) = \sum_{\mu \in \mathcal{E}} P_\lambda(f) \circ P_\mu(f) +$$

$$P_\lambda(f) \circ P_\lambda(f).$$

$$= \left[P_\lambda(f)\right]^2 \text{ car } P_\lambda(f) \circ P_\mu(f) = 0, \forall \lambda \neq \mu.$$

(3) : Les $N_\lambda(f)$ sont nilpotent.

$$\left[N_\lambda(f)\right]^{\gamma_\lambda} = \left[P_\lambda(f) \circ (f - \lambda \, id_E)\right]^{\gamma_\lambda}.$$

$$= [P_\lambda(f)]^{\gamma_\lambda} \circ (f - \lambda id_E)^{\gamma_\lambda}$$

$$= P_\lambda(f) \circ (f - \lambda id_E)^{\gamma_\lambda}$$

$$= A_\lambda(f) \circ \Omega_\lambda(f) \circ (f - \lambda id_E)^{\gamma_\lambda}$$

$$= A_\lambda(f) \circ \left(\frac{P}{\omega_\lambda}\right)(f) \circ (f - \lambda id_E)^{\gamma_\lambda}$$

$$= A_\lambda(f) \circ \frac{P}{\omega_\lambda}(f) \circ \omega_\lambda(f).$$

$$= A_\lambda(f) \circ \underbrace{P(f)}_{=0}$$

$$= 0$$

De la même façon on établit les autres relations.

* $N_\lambda(f) \circ P_\lambda(f) = [P_\lambda(f) \circ (f - \lambda id_E)] \circ P_\lambda(f)$.

$$= [P_\lambda(f)] \circ [P_\lambda(f) \circ (f - \lambda id_E)]$$

$$= P_\lambda(f) \circ N_\lambda(f).$$

$$= [P_\lambda(f)]^2 \circ (f - \lambda id_E)$$

$$= P_\lambda(f) \circ (f - \lambda id_E) = N_\lambda(f)$$

$$N_\lambda(f) \circ P_\mu(f) = P_\mu(f) \circ N_\lambda(f) = 0$$

si $\lambda \neq \mu$.

Scanned by CamScanner

Corollaire

Soit f un endo scindé de E et P un polynôme annulateur de f.

Mardi, le 20 Fevrier 2018 8h-12h

Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f)(E).$$

Preuve. Soit P un polynôme annulateur de f. Alors d'après le theorème précédent on a $id_E = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f)$.

Ainsi tout vecteur x de E se decompose comme somme de vecteur ~~dans~~ des sous espaces vectoriels ; $P_\lambda f(E)$, $\lambda \in \mathcal{E}$.

$$x = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f)(x) \in \sum_{\lambda \in \mathcal{E}} P_\lambda(f)(E).$$

Montrons que comme la somme est directe.
Soit $\lambda, \mu \in \mathcal{E}$ tq $\lambda \neq \mu$.
Soit $v \in P_\lambda(f)(E) \cap P_\mu(f)(E)$. Alors il existe v_1 et $v_2 \in E$ tque

$$v = P_\lambda(f)(v_1) = P_\mu(f)(v_2).$$

Ainsi on a $v = P_\lambda(f)(v)$ car $P_\lambda(f)$ est un projecteur.

D'où

$$v = P_\lambda(f) \circ P_\mu(f)(v_2)$$
$$= 0 \text{ car } \lambda \neq \mu$$
$$\Rightarrow P_\lambda(f) \circ P_\mu(f) = 0.$$

Remarque

(1) $P_\lambda(f)/_{\mathrm{Im}\, P_\lambda(f)} = Id$.

(2) $P_\lambda(f)/_{\mathrm{Im}\, P_\mu(f)} = 0 \quad \lambda \neq \mu$.

Définition :

les projecteurs $P_\lambda(f)$ et les nilpotents $N_\lambda(f)$ sont appelés les éléments spectraux de f.

Détermination de P_λ.

Posons P le polynôme caractéristique normalisé de f et $sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et f étant scindé, Posons

$$P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \text{ avec } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n = \dim E$$

D'après le théorème précédent.

$$Id_E = \sum_{i=1}^{p} P_\lambda(f) \text{ où } P_{\lambda_i}(f) = A_{\lambda_i}(f) \circ \Omega_{\lambda_i}(f).$$

avec A_{λ_i} issu de la decomposition de Bezout.

On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} A_{\lambda_i} \Omega_{\lambda_i} = 1$ où $\Omega_{\lambda_i} = \dfrac{P}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$

D'où

$$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{p} A_{\lambda_i} \frac{\Omega_{\lambda_i}}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_{\lambda_i}}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_{\lambda_i}}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}}$$

Ainsi, les $A_{\lambda i}$ sont fournis par la decomposition en elements simples de $\frac{1}{P}$

Exercice. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ dans la base Canoniq de $\mathbb{R}^2$ d'un endomorphisme f.
Determiner les éléments spectraux de f.

Exercice 2 Même question avec B. 1)

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

~~A =~~

2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resolution

$$\chi_A = (3-X)(1-X) \Rightarrow P_A = (X-1)(X-3).$$

$$Sp(A) = \{1, 3\}.$$

Determinons P_1, P_3, N_1, N_3.

On a $\Omega_1 = \frac{P_A}{X-1} = X-3$; $\Omega_3 = X-1$.

On sait que $P_1 = A_1 \Omega_1 = (X-3) A_1$

$$P_2 = (X-1) A_3.$$

Or $\frac{1}{P_A} = \frac{1}{(X-1)(X-3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{X-3}$.

Ainsi, $A_1 = -\frac{1}{2}$ et $A_3 = \frac{1}{2}$.

Par conséquent

$P_1 = -\frac{1}{2}(X-3)$ et $P_3 = \frac{1}{2}(X-1)$

D'où

$$P_1(f) = -\frac{1}{2}(A - 3I) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P_3(f) = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$N_1 = P_1(f) \circ (f - id) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$N_1 = 0$

$$N_3 = P_3(f) \circ (f - 3id) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

En définitive

On a : $f = P_1(f) + 3P_3(f) + (N_1 + N_3)$.

$f = P_1(f) + 3P_3(f)$.

$A =$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons χ_A.

$$\chi_A = |A - XI_3|.$$

$$\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 4-X & -2 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 2-X & -X & 1 \\ 2-X & -2 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$(2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & -2 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$(2-X)\Big|$$

$$\chi_A = (2-X)^2(1-X).$$

$$P_A = (X-2)^2(X-1).$$

$$Sp(A) = \{1, 2\}.$$

Déterminons P_1, P_2, N_1, N_2.

$$\Omega_1 = (X-2)^2$$

$$\Omega_2 = X-1$$

$$P_\lambda(f) = A_\lambda(f)\,\Omega_\lambda(f).$$

$$P_1 = A_1 \Omega_1.$$

On a $\dfrac{1}{P_A} = \dfrac{1}{(X-2)^2(X-1)}$

$$\frac{1}{P_A} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{X-1}.$$

$$\frac{1}{P_A} = -\frac{1}{X-2}$$

$$a + \frac{b}{x-2} + \frac{c(x-2)}{x-1} = \frac{1}{(x-2)(x-1)}.$$

$a + c = 0$

$$\frac{a(x-b)}{x-2} + \frac{b(x-1)}{(x-2)^2} + c = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = -1.$

$$a(x-2) + b + c\frac{(x-2)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{P_A} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_{\lambda i}}{(x-\lambda_i)^{\alpha_i}}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{A_{\lambda_1}}{(x-\lambda_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{\lambda_2}}{(x-\lambda_2)^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{A_{\lambda p}}{(x-\lambda_p)^{\alpha p}}.$$

$$\frac{1}{P_A} = \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_1}{(x-1)} = \frac{-(x-2)+1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

$$= \frac{-x+3}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Par identification

$A_2 = -x+3$

$A_2 = 1$

$* \; P_1 = A_1 \Omega_1$

$= (x-2)^2$

$* \; P_2 = A_2 \Omega_2.$

$P_2 = (-x+3)(x-1)$

$P_1(A) = A - 2I.$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(A) = A_2(A)\,\Omega_2(A)$.

$= (-A+3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$N_\lambda(f) = P_\lambda(f)\,(f - \lambda id_E)$.

$N_1(A) = P_1(A)(A - I_3) = 0$

$N_2(A) = P_2(A)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Notes :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ scindé / $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots \lambda_p\}$. et P_{λ_i}, N_i les élements spectraux de f Alors la decomposition de Dunford de f est : $f = D + N$ où

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}(f) \quad \text{et} \quad N = \sum_{i=1}^{p} N_{\lambda_i}$$

VI | Reduction de Jordan.

La reduction ~~de Jordan~~ par bloc triangulaire est en general suffisante pour les applications. Cependant, une derniére reduction peut être effectuer à l'interieur de chaque bloc, jusqu'à obtenir la forme qui dans un certain sens est la plus simple possible. Il s'agit de la forme de Jordan

Definition : On appelle bloc de Jordan Toute matrice carré de la forme

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

On a :

$$J_1(\lambda) = (\lambda) \quad , \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Proposition :

Soit $J(\lambda)$ un bloc de Jordan d'ordre n. Alors

(1) $\chi_{J(\lambda)} = (\lambda - x)^n$.

(2) $\mu_{J(\lambda)} = (x - \lambda)^n$

(3) $\dim E_\lambda = 1$.

Theorème (de Jordan).

Soit f un endo de E scindé.

(1) Supposons que f n'a qu'une seule valeur propre λ et que.

(i) $\chi_f = (\lambda - x)^n = (-1)^n (x-\lambda)^n$.

(ii) $\mu_f = (x-\lambda)^\beta$.

(iii) $\dim E_\lambda = \gamma$.

Alors il existe une base de E telle que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & & 0 \\ & J_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_\gamma(\lambda) \end{pmatrix} = \tilde{J}(\lambda).$$

où
- les $J_k(\lambda)$ sont des blocs de Jordan.
- L'ordre du plus grand bloc est β : β étant l'indice de nilpotence de $f - \lambda id_E$
- Le nombre de blocs est γ

(2) Supposons que f admet p valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_p$ de multiplicité respectives $\alpha_1, \dots \alpha_p$ ie

$$\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = n.$$

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{J}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \tilde{J}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{J}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

Exemple 1: Soit E un $\mathbb{K}$-e-v de dim 5 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_f = -(X-\lambda)^5$.

$\mu_f = (X-\lambda)^3$ $\dim E_\lambda = 2$.

Alors il existe une $\mathcal{B}$ base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f sont.

$$M = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple 2 E un $\mathbb{K}$-e-v de dim 5.

$f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$\chi_f = -(X-\lambda)^5$.

$\mu_f = (X-\lambda)^3$.

$\dim E_\lambda = 3$.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que dans $\mathcal{B}$ la matrice M de f est :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Note ; Si On dispose pour une matrice donnée. Polynôme Caracteristique, polynôme minimal et la dimension de sous espace propres associé à ~~la~~ toutes valeur propre λ On peut ecrire la matrice de Jordan correspondante.

Demonstration du theorème(1).

(1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\chi_f = (-1)^n (x-\lambda)^n$.

Alors, f est triangulaire. Ainsi, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \lambda I + N$ ou encore $f = \lambda id_E + g$.

avec N matrice nilpotente.

Puisque la matrice λI de l'endo λid_E est la même dans toutes bases de E.

Alors le probleme revient à etudier la réduction des endomorphismes nilpotent

Lemme : Soit g un endo nilpotent d'indice β. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $\beta = n$ ie $\chi_g = (-1)^n(X^n)$ et $\mu_g = X^n$

(2) Il existe $x \in E$; $x \neq 0$ tq $(x, g(x), \ldots, g^{n-1}(x))$ est une base de E. Dans ce cas on parle d'endomorphisme cyclique.

(3) Il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de g est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

N est la matrice de Jordan d'ordre n de 0 $J(0)$.

Preuve :

(2) $\Leftrightarrow$ (3) est évident.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons (1). Alors $g^{n-1} \neq 0$. Donc, il existe $x \in E$ tq $g^{n-1}(x) \neq 0$.

Posons $\begin{cases} u_n = x. \\ u_{n-1} = g(x) \\ \vdots \\ u_1 = g^{n-1}(x) \end{cases}$

Montrons que $\{U_1, \dots, U_n\}$ est une base de E. Soit $(\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tq

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_k = 0$. Alors on a

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g^{n-k}(x) = 0$$

En prenant l'image par g^{n-k} pour $k = 1, \dots, n$.
On obtient successivement $\alpha_n = \dots \alpha_1 = 0$.
Par conséquent $(U_1, \dots U_n)$ est une base de B d'où $(1) \Rightarrow (2)$.

$(2) \Rightarrow (1)$ est évident car $\beta = n$

Pour le cas général, le problème revient à démontrer que : si g est nilpotent, E est somme direct de sous espaces stable par g tels que la ~~reduct~~ restriction de g dans chacun des sous espaces est un endomorphisme cyclique.

Jeudi, le 22 Février 2018 8h - 12h

Lemme : Soit g un endϕ nilpotent d'indice β. Notons $N_i = \ker g^i$. Alors on a la suite d'inclusion strictes suivantes.

$$\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots \subset N_\beta = E.$$

En effet si il existe $i \in \{1, \dots \beta\}$ tel que $N_i = N_{i+1}$ on aurait
$N_i = N_{i+1} = \dots = N_\beta = E$. Ce qui impliquerait de nilpotence de g est est $\leq i < \beta$.
Ce qui est impossible.

Lemme : Soit g un endo nilpotent d'indice β. Alors il existe des s-e-v $M_1, \dots, M_\beta$ reduit à $\{0\}$ tels que
(1) $N_i = N_{i-1} \oplus M_i$.
(2) $g(M_i) \subset M_{i-1}$.

Lemme :

$$E = M_1 \oplus \dots \oplus M_\beta$$

Nous pouvons maintenant construire une base de E donnant la reduction de Jordan
- M_β que l'on note G_β, on considère une base de M_β
- Dans $M_{i-1} = g(M_i) + G_{i-1}$, on prend l'image de la base construite sur M et on complète par une base quelconque de G_{i-1}.

Ainsi, on obtient les bases $\mathcal{B}_\beta, \mathcal{B}_{\beta-1}, \dots \mathcal{B}_1$ dans $M_\beta, M_{\beta-1}, \dots, M_1$

On regroupe ensuite judicieusement les vecteurs pour obtenir la base adaptée.

VIII - Exponentielle d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle exponentielle de la matrice A et on note $\exp(A)$ ou e^A, la limite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la suite de therme général $S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$

On écrit : $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$

Propriétés

1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $e^{\lambda I} = e^{\lambda} I$

2) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

3) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: e^A est inversible et on a : $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

4) $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

5) Si $M = P^{-1} D P \Rightarrow e^M = P^{-1} e^D P$

Applications aux systèmes différentiels linéaires.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, la solution générale du système linéaire ~~est~~ : (H) : $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$ est donnée par :

$X(t) = e^{tA} \cdot C$ ou $C \in \mathbb{R}^n$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de l'equation (H) qui vaut X_0 au point t_0 est l'application $t \longmapsto X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$

Plus généralement, la solution générale de l'équation (E) : $\frac{dX}{dt} = AX + B$ s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale du système homogène $\frac{dX}{dt} = AX$.

Exemple : $A \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A = (2-X)^2(1-X)$.

- $Sp(A) = \{1, 2\}$.
- A est trigonalisable.
- E_1 : $U(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y - z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow U(0, y, y) \Rightarrow y(0, 1, 1) \Rightarrow$

$E_1 = \left\langle U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

- E_2 :

$U(x, y, z) \in E_2 = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

$U = (x, x, 0) = x(1, 1, 0) \Rightarrow E_2 = \left\langle U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

- Cherchons $U_3 = (x, y, z)$ tq (U_1, U_2, U_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(u_3) = a u_1 + b u_2 + 2 u_3.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = b + 2x. \\ 2x + z = a + b + 2y. \\ x - y + 2z = a + 2z. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = b. \\ 2x - 2y + z = a + b. \\ x - y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a. \\ 2x - 2y + z = a + b. \\ x - y + z = b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a. \\ z = a + b - 2a \\ z = b - a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = a \\ z = b - a. \end{cases}$$

Prenons $a = b = 1$. alors $z = 0$. et $x - y = 1$.

En prenant $y = 1$ on obtient $x = 2$.

D'où $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $a = b = 1$.

Verifions que (u_1, u_2, u_3) est libre. Donc (u_1, u_2, u_3) est une base de trigonalisation de A et on a :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inverse de P.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $T = P^{-1}AP$.

$\Rightarrow A = PTP^{-1}$.

Ecrivons

$T = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on}$$

Vérifié que

$ND = DN$ et $N^2 = 0$

Par suite

$$e^T = e^D e^N e^D (I+N).$$

$$e^T = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} e & 0 & 1 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Comme $A = PTP^{-}$

$e^A = P e^T P^{-1}$.

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 1 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2 : Dualité.

I. Dual d'un espace vectoriel.

Definition: Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

On appelle forme linéaire sur E une applicat° linéaire de E sur $\mathbb{K}$.

On appelle espace dual de E l'ensemble des formes linéaires sur E. Ils constituent un $\mathbb{K}$-e.v. On le note E^*

Exemple:

(1) $E = \mathbb{K}^n$ $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. l'applicat°
$f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ definie par $f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$
où $x = (x_1, \dots, x_n)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}$.

(2) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application

$$\begin{aligned} T_r : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M &\longmapsto Tr(M) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(3) Considérons $E = \mathcal{C}([a,b])$ le $\mathbb{R}$ e-v des fonctions continues sur $[a,b]$.

L'application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$\phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire.

Notation: Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker designe l'applicat°

$\delta : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{0, 1\}$

$(i,j) \longmapsto \delta(i,j) = \delta_{ij}$

telle que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit E un $\mathbb{K}$-e-v de dim n et $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tout $x \in E$, il existe, $x_1 \dots x_n \in \mathbb{K}$ tq

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

On definit alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, la forme linéaire e_i^* par :

$$\boxed{e_i^*(x) = x_i}$$

C'est une forme linéaire appelée $1^{ère}$ forme linéaire coordonnée.

Proposition :

La famille $(e_1^*, \dots e_n^*)$ est caractérisée par $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

Theorème :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base E^*

Preuve : Montrons que $\mathcal{B}^*$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tq $\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$

Alors en appliquant cette forme à tout e_i on a :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*\right)(e_i) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_j = 0, \text{ car } \delta_{ij} = 0 \ i \neq j.$$

$$\Leftrightarrow (e_i^*)_{i=1,\dots n} \text{ est libre.}$$

Par ailleurs

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$$
$$= \dim_{\mathbb{K}} E \times \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}$$
$$= \dim_{\mathbb{K}} E.$$

$$\dim E^* = n.$$

Par conséquent, $\mathcal{B}^*$ est une base de E^*.

Definition : $\mathcal{B}^*$ est appelée la base duale de la base $\mathcal{B}$

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-e-v et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour toute forme linéaire ϕ de E on a :

$$\phi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) e_i^*$$

Preuve : Soit $\phi \in E^*$ et $x \in E$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Alors on a :

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) e_i^*(x)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) e_i^*\right)(x) \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) e_i^*$$

Proposition :

Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Alors il existe un unique vecteur $(a_1, \dots a_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on ait :

$$\phi(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

Preuve : Considérons la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Alors tout élément x de $\mathbb{K}^n$ s'écrit

$$x = (x_1, \dots x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

D'après la proposition précédente on a :

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) x_i.$$

Il suffit de poser $a_i = \phi(e_i)$ pour obtenir l'unique vecteur attendu.

II) Bidual

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle bidual de E l'espace dual de E^*. On la note E^{**}.

Proposition : Soit E un $\mathbb{K}$-e-v et x un vecteur de E. Alors l'application

$$\hat{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\phi \longmapsto \phi(x)$$

est linéaire.

Preuve : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ϕ et $\psi \in E^*$.

$$\hat{x}(\alpha\phi + \beta\psi) = (\alpha\phi + \beta\psi)(x)$$
$$= \alpha\phi(x) + \beta\psi(x)$$
$$= \alpha\hat{x}(\phi) + \beta\hat{x}(\psi)$$

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$ e-v de dim finie. Alors, l'application

$$\phi : E \longrightarrow E^{**}$$
$$x \longmapsto \hat{x}$$

est un isoϕ.

Vendredi, le 23 Février 2018

$8^h - 12^h$

Lemme : Soit E un $\mathbb{K}$-e-v de dimension finie et x un vecteur non nul de E. Alors, il existe une forme linéaire φ sur E tq $\varphi(x) = 1$.

Preuve : supposons $\dim E = n$. soit $x \in E$, $x \neq 0$ Complétons le en une base de E. $\mathcal{B} = (x_1, e_2 \dots e_n)$. Considérons la base duale de $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}^* = (x_1^*, e_2^* \dots e_n^*)$.

Aussi, $\varphi = x^*$ est une forme linéaire sur E tq. $\varphi(x) = x^*(x) = 1$.

Preuve du theorème

- ϕ est lineaire.
- Comme $\dim E = \dim E^{**}$ il nous suffit de montrer que ϕ est injectif.

Soit $x \in E$, $x \neq 0$. D'après le lemme précédent il existe $\varphi \in E^*$ tq $\varphi(x) = 1$ D'ou $\hat{x}(\varphi) = 1$ soit encore $[\phi(x)](x) = 1$.

Ce qui nous dit que $\phi(x) \neq 0$.

Par consequent, $\underline{\operatorname{Ker}\phi =} \{0\}$ et ϕ est injective

Remarque : L'iso ϕ ne depend pas de la base choisie. Il est appelé iso Canonique.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\mathcal{B}^{**} = (\phi(e_1), \dots \phi(e_n))$$

$$= (e_1^{**}, \dots, e_n^{**})$$

$$\phi(e_i)(e_j^*) = e_j^*(e_i) = \delta_{ij} = e_j^{**}(e_i)$$

Proposition: Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ est base duale. Elle est appelée la base préduale de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Preuve :

Soit $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ une base de E^*. Alors Considérons sa base duale $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$ de E^{**}.

D'après le theorème précédent, il existe par isomorf. une base unique de E $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\phi(\mathcal{B}) = (e_1^*, \dots e_n^*)$ ie

$$\phi(e_i) = \hat{e}_i = \varphi_i^* \quad \forall i$$

$$\Leftrightarrow e_i = \phi^{-1}(\varphi_i^*), \ \forall i$$

Exercice 1: On considère le $\mathbb{K}$-e-v $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et les deux formes linéaires.

$\varphi_1(x) = 3x_1 + 2x_2$ et $\varphi_2(x) = x_1 + x_2$.

1) Montrer que (φ_1, φ_2) est une base de $\mathbb{R}^*$.

2) Determiner la base préduale.

Exercice 2 : On considère le $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$

1) Montrer la famille $\left[u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$

$u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2°) Déterminons sa base duale $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

3) Exprimer la forme linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(x, y, z) = 2x_1 + y_2 - z_3$ dans la base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

III) Les hyperplans.

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-e-v et H un s-e-v de E. On dit que H est un hyperplan de E. Si H est supplémentaire à une droite vectorielle dans E.

$$E = \underbrace{H}_{\text{Hyperplan}} \oplus \overbrace{\mathbb{K}x_0}^{\text{Droite}}$$

avec $x_0 \neq 0$

Remarque : Si $\dim E = n$ alors hyperplan H de E est de dimension $n-1$

Exemple : $E = \mathbb{R}^3$, $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$.

$$\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}e_1.$$

Théorème : Soit H un s-e-v de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) H est un hyperplan

(2) Il existe φ forme linéaire non nulle de E tq $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

Preuve :

(1) ⟹ (2) Supposons que H est un hyperplan. Alors par définition, il existe $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ tq
$E = H \oplus \mathbb{K}x_0$. Considérons n la dim de E.
Alors $\dim H = n-1$. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H. Par suite

$B(e_1, \dots e_{n-1}, x_0)$ est une base de E.

Considérons $B^* = (e_1^*, \dots e_n^*, x_0^*)$ sa base duale.

Alors on a :

$x_0^*(x_0) = 1$ et $x_0^*(e_i) = 0 \ \forall i$

Ainsi $H \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ avec $\varphi = x_0^*$

Comme $\varphi \neq 0$ alors $rg(\varphi) = 1$.

Donc $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n-1$.

Par Conséquent, $H = \operatorname{Ker}\varphi$ car $\dim H = n-1$.

(2) ⟹ (1) Supposons qu'il existe $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ tq $H = \operatorname{Ker}\varphi$. Comme $\varphi \neq 0$, alors il existe $x_0 \in E$ tq $\varphi(x_0) \neq 0$.

Considérons alors le vecteur $x_1 = \dfrac{x_0}{\varphi(x_0)}$ et $H = \operatorname{Ker}\varphi$.

Soit $x \in E$. On peut écrire

$$\underbrace{\in H}\ \Leftarrow\ x = (x - \varphi(x)x_1) + \varphi(x)x_1 \Rightarrow \in \mathbb{K}x_1$$

$x \in H + \mathbb{K} x_1$.

Ainsi $E = H \oplus \mathbb{K} x_1$ car $H \cap \mathbb{K} x_1 = \{0\}$.

Remarque : Sur $\mathbb{K}^n$, l'equation d'un hyperplan est de la forme : (H) : $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$

III) Orthogonalité

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-e-v.

- Soit $x \in E$ et $\varphi \in E^*$. On dit que x et φ st. orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.
- Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A, le s-e-v de E^* defini par.

$$A^\circ = \{\varphi \in E^* \,/\, \varphi(a) = 0, \forall a \in A\}.$$

- Soit $B \subset E^*$, On appelle orthogonal de B le s-e-v de E defini par.

$$B^\circ = \{x \in E, \varphi(x) = 0 \,/\, \varphi \in B\}.$$

Propriété : Soit A, A_1 et A_2 3 parties de E. et B, B_1, B_2 3 parties E^*. Alors on a :

(1) $A = (\mathrm{Vect}(A))^\circ$, $A \subset (A^\circ)^\circ$

(2) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1^\circ \subset A_2^\circ$.

(3) $B^\circ = (\mathrm{Vect}(B))^\circ \Rightarrow B^\circ \subset (B^\circ)^\circ$

(4) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_2^\circ \subset B_1^\circ$.

Théorème : Soit E un $\mathbb{K}$-e-v de dim n, alors on a :

(1) Si F est un s e v de E alors ~~on a~~ :

$\dim F + \dim F^{\circ} = n$ et $(F^{\circ})^{\circ} = F$.

(2) Si G est s-e v de E^{*} alors $\dim G + \dim G^{\circ} = n$ et $(G^{\circ})^{\circ} = G$.

Preuve :

~~Soit E un K e v de dim n. Alors~~

(1) Supposons $\dim F = p$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Complétons la en une base $(e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ de E. Alors avons $F^{\circ} = \{e_1, \dots, e_p\}$.
car $F = Vect(\{e_1, \dots e_p\})$

Soit $\varphi \in E^{*}$. Alors φ s'écrit $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^{*}$

Ainsi $\varphi \in F^{\circ} \iff \forall i \in 1, \dots, p \quad \varphi(e_i) = 0$.

Donc $\varphi = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i^{*}$ ce qui nous dit que

$F^{\circ} = Vect(e_{p+1}^{*}, \dots e_n^{*})$ donc $\dim F^{\circ} = n - p$.

$\Rightarrow \dim F + \dim F^{\circ} = n = \dim E$.

Par ailleurs, on a $F \subset (F^{\circ})^{\circ}$ or $\dim F + \dim F^{\circ} = \dim F^{\circ} + \dim F^{\circ\circ}$ donc $\dim F = \dim F^{\circ\circ}$ et $F = (F^{\circ})^{\circ}$

2. Idem que (1).

Exercice :

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f, g deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies par :

$f(x,y,z) = x+y-2z$.

$g(x,y,z) = x+3z$.

1) Montrons que f et g sont linéairement indépendant.

2) Déterminons G^0 où $G = \mathrm{Vect}(f,g)$.

VI) Transposition

Définition :

Soit E, F 2 $\mathbb{K}$-e-v $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle transposée de l'application linéaire ^tf de F^* dans E^* définie par

$$^tf : F^* \longrightarrow E^*$$
$$\varphi \longmapsto {^tf}(\varphi) = \varphi \circ f$$

Propriété.

(1) L'application $\mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$
$f \longrightarrow {^tf}$ est linéaire

(2) $^t\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$.

(3) soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $^t(g\circ f) = {^tf} \circ {^tg}$.

Preuve :

(1) et (2) sont immédiats.

(3) soit $\varphi \in G^*$. On a :

$$^t(g\circ f)(\varphi) = \varphi \circ (g\circ f)$$
$$= (\varphi\circ g)\circ f.$$
$$= {^tg}(\varphi)\circ f.$$
$$= {^tf}({^tg}(\varphi)) = {^tf}\circ{^tg}(\varphi)$$

Représentation matricielle de ${}^tf$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}=(u_1,\dots u_n)$ une base de F.

Proposition.

Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ représenté par la matrice M dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$. Alors, la matrice ${}^tf$ dans les bases duales $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{B}^*$ est la matrice de ${}^tM$.

<u>Preuve</u>: Soit $M=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Alors on a.

$$f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i$$

$${}^tf=(u_j^*)(e_i)=u_j^*\circ f(e_i)=u_j*\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ki}u_k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}u_j^*(u_k).$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_{ki}\delta_{jk}=a_{ji}$$

Soit $x\in E$ tq $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$.

Alors par suite

$$x=\sum_{i=1}^{n}e_i^*(x)e_i$$

$$ {}^tf(u_j^*)(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, e_i^*(x). $$

$$ {}^tf(u_j^*)(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, e_i^*\right)(x). $$

$$ {}^tf(u_j^*) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, e_i^* $$

$\Rightarrow M({}^tf) = {}^tM.$

Corollaire : Soit E, F 2 $\mathbb{K}$-e-v et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors on a :

(1) $rg({}^tf) = rg(f)$

(2) $\det({}^tf) = \det(f)$

(3) $tr({}^tf) = tr(f)$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors on a :

$$ Ker({}^tf) = (Im f)^\circ $$

Si de plus E et F sont de dimension finie alors : $Im({}^tf) = (Ker f)^\circ$.

Preuve :

$*$ $\varphi \in Ker\, {}^tf \Leftrightarrow \varphi \circ f = 0.$

$\Leftrightarrow \varphi \circ f(x) = 0, \forall x \in E.$

$\Leftrightarrow \forall y \in Im f ;\ \varphi(y) = 0.$

$\Leftrightarrow \varphi \in (Im f)^\circ$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} {}^t f = (\operatorname{Im} f)^\circ$

** Supposons E et F dim finie.

Soit $\varphi \in \operatorname{Im} {}^t f$. Alors il existe $\psi \in F^*$ tq

$\varphi = {}^t f(\psi) = \psi \circ f$.

Par ailleurs:

$\forall x \in \operatorname{Ker} f$, $\psi \circ f(x) = 0$, ie $\varphi(x) = 0$

Donc, $\varphi \in (\operatorname{Ker} f)^\circ$ et $\operatorname{Im} {}^t f \subset (\operatorname{Ker} f)^\circ$

D'après le théorème du rang on a:

$rg(f) + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$.

$rg({}^t f) + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E = \dim(\operatorname{Ker} f)^\circ + \cancel{\dim}$
$+ \dim \operatorname{Ker} f$.

Donc $rg({}^t f) = \dim(\operatorname{Ker} f)^\circ$

Ainsi $\dim {}^t f = \dim(\operatorname{Ker} f)^\circ$

Par conséquent, $\operatorname{Im} {}^t f = (\operatorname{Ker} f)^\circ$ $\square$.

Merci Mr pour votre sens élevé de responsabilité.